Physique d'un grappin

---

1 Mouvement vertical du grappin

On considère le joueur tracté par le grappin à une certaine vitesse, jusqu'à une certaine altitude x_0. À cette altitude, le grappin est détaché et le joueur a une vitesse $\overrightarrow{v_0}$. On note l'altitude du joueur $\overrightarrow{x}(t)$ et sa vitesse $\overrightarrow{v}(t)$.

On applique le principe fondamental de la dynamique au joueur qui n'est soumis qu'à la force de gravitation et on intégre les équations obtenues, ainsi :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\overrightarrow{v}(t) & = & (-gt+v_0)\overrightarrow{u_x}+0\overrightarrow{u_y} \\ \\ \overrightarrow{x}(t) & = & (-gt^2+v_0t+x_0)\overrightarrow{u_x}+0\overrightarrow{u_y}\end{array}\right.$$

Ces équations ne sont qu'un cas particulier du cas suivant. Dans cette section, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

2 Mouvement parabolique

Le joueur est maintenant tiré dans une direction. Au moment où le grappin est relâché, le joueur possède une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ qui s'exprime dans la base cartésienne : $\overrightarrow{v_0} = v_0(\sin(\alpha)\overrightarrow{u_x} + \cos(\alpha)\overrightarrow{u_y})$. Où α désigne l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{v_0}$ et l'axe de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_y}$. Le joueur possède également une position initiale $\overrightarrow{x_0} = x\overrightarrow{u_x}+y\overrightarrow{u_y}$, ($x$, et y sont les coordonnées du joueur).

On a les équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\overrightarrow{v}(t) & = & -gt\overrightarrow{u_x}+v_0(\sin(\alpha)\overrightarrow{u_x}+\cos(\alpha)\overrightarrow{u_y} \\ \\ \overrightarrow{x}(t) & = & -\dfrac{gt^2}{2}\overrightarrow{u_x}+v_0t(\sin(\alpha)\overrightarrow{u_x}+\cos(\alpha)\overrightarrow{u_y})+\overrightarrow{x_0}\end{array}\right.$$

3 Mouvement circulaire autour du point d'accroche

On considère qu'à l'instant initial, le grappin s'accroche en un point de l'espace, le joueur pend alors au bout du fil du grappin dans un mouvement circulaire. On note l la longueur du fil du grappin et θ l'angle orienté entre la droite de vecteur directeur $-\overrightarrow{u_x}$ et le fil du grappin. Ainsi lorsque le joueur pend à la vertical du point d'accroche, sans bouger, $\theta = 0$.

À cet instant initial, $\theta(t=0) = \theta_0$ et la vitesse angulaire est de $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t=0) = \theta'_0$. θ vérifie l'équation différentielle d'ordre deux suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

On pose la pulsation caractéristique du pendule : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Alors θ est une fonction du temps de la forme :

$$\theta = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

En dérivant :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$$

En reprenant les conditions initiale, on établit que :

$$\begin{cases} A &= \theta_0 \\ B &= \dfrac{\theta'_0}{\omega_0} \end{cases}$$

D'où les équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t) &= -\theta_0\omega_0\sin(\omega_0 t) + \theta'_0\cos(\omega_0 t) \\ \theta(t) &= \theta_0\omega_0\cos(\omega_0 t) + \dfrac{\theta'_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \end{cases}$$

Les vecteurs vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ et position $\overrightarrow{x}(t)$ du joueur pouvent être retrouvés par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{v}(t) &= l\left(\cos\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_x} + \sin\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_y}\right) \\ \overrightarrow{x}(t) &= l(\cos\theta\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\overrightarrow{u_y}) \end{cases}$$